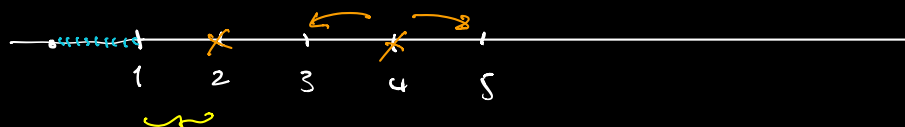


Vimos ayer que los conjuntos finitos no tienen ningún p. de a.
 ¿Qué pasa con los conjuntos infinitos? Los hay sin puntos de acumulación; y los hay con p. de a.

Por ejemplo $\mathbb{N} : \rightarrow$ infinito, no tiene ningún p. de a.

¿Qué caract. tienen los elementos de \mathbb{N} ? Todos sus elementos están separados entre sí más (o igual) que una distancia positiva fija ($=1$):



$$\Omega = \{.001n : n \in \mathbb{N}\} = .001, .002, .003, \dots$$

$$\Omega = \{n, n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 1, 2, 2 + \frac{1}{2}, 3, 3 + \frac{1}{3}, 4, 4 + \frac{1}{4}, \dots$$



$$\Omega = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \dots, \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right), \dots$$

(...

Todos ellos son conj. infinitos sin p. de a. alguno.

¿Qué tienen en común?

¿Qué les permite a los elementos (2 ults ej.s.) irse pegando entre sí, sin acabar acumulándose en torno a ningún punto de la recta?

Todos ellos son conjuntos NO ACOTADOS.



Pregunta:

¿Y si un conjunto infinito fuese acotado, podría no tener ningún p. de a.?

Veamos: Sea Ω un conj. infinito acotado.

$$\Downarrow$$
$$\Omega \subseteq [a, b], \quad a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\Omega \subseteq [0, 1000]$$



$$0, .001, .002, .003, \dots, .999, 1, 1.001, \dots, 1.999, 2, \dots,$$

$$999, 999.01, \dots, 999.999, 1000$$

$$\frac{p}{2^n}$$

(...)

Todo indica que:

Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ infinito y acotado $\Rightarrow \exists \xi \in \mathbb{R}$ s.t.
 ξ es p. de a. de Ω .

i.e. Todo conjunto infinito y acotado tiene el menos
un punto de acumulación.

¿Puede el teorema anterior formularse en un campo ordenado en general?

" Sea X un campo ordenado.

Si $\Omega \subseteq X$ es un conjunto infinito y acotado

$\Rightarrow \exists \xi \in X$ s.t. ξ es punto de acumulación de Ω "

En particular: ¿Es válido el Teo B-W en \mathbb{Q} ?

i.e. ¿Es válido que $\forall \Omega \subseteq \mathbb{Q}$, Ω infinito y acotado

$\exists \xi \in \mathbb{Q}$ s.t. ξ es p. de a. de Ω ?



Pensemos en el conjunto

$$\Omega = \{.1, .101, .101001, .1010010001, \dots\}$$

Obrviamente se trata de un conjunto infinito, y acotado, pues

$$0, 1 \in \mathbb{Q}, \quad 0 < x < 1 \quad \forall x \in \Omega; \quad \Omega \subseteq \mathbb{Q}.$$

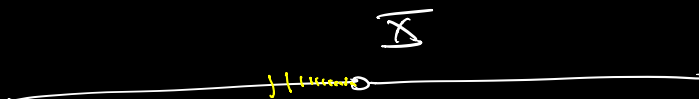
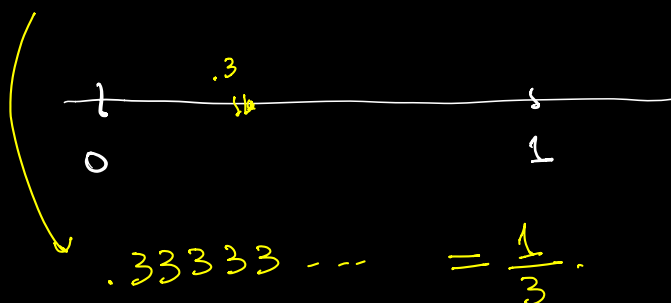


¿Quién es el único
p. de a. de Ω ?

$$\alpha = .101001000100001\dots$$

↓
 $\alpha \in \mathbb{I}.$

$$A = \{.3, .33, .333, .3333, \dots\}$$



Teorema de B-W

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto infinito y acotado.

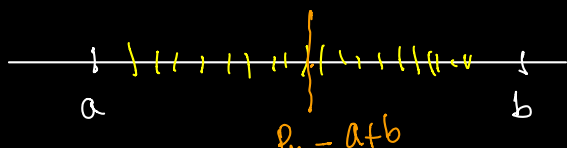
Entonces $\exists \xi \in \mathbb{R}$ s.t. ξ es p. de a. de Ω .

Dem.

Por ser Ω acotado $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$

$a < b$ s.t. $a \leq x \leq b \quad \forall x \in \Omega.$

i.e. $\Omega \subseteq [a, b].$



Recordatorio:

El teorema de encajes de intervalos.

\forall encaje $\{[a_n, b_n]\}$ de intervalos cerrados en \mathbb{R} s.t.

$$\mathcal{L}([a_n, b_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \emptyset$$

Al tomar el punto medio entre a y b se generan dos subintervalos, al menos uno de ellos, con una infinidad de elementos de Ω .

Llamemos $[a_1, b_1]$ a dicho intervalo.

¿Qué cumple $[a_1, b_1]$?

Tres cosas:

$$(i) [a_1, b_1] \subseteq [a, b].$$

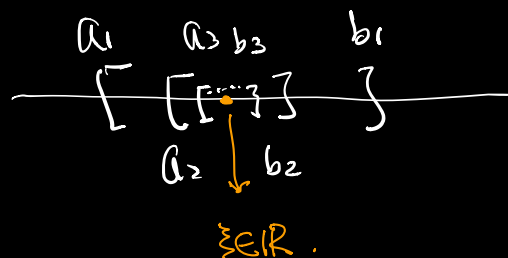
$$(ii) l([a_1, b_1]) = \frac{1}{2} l([a, b]) = \frac{1}{2} (b-a)$$

(iii) En $[a_1, b_1]$ hay una infinidad de elementos de Ω .

Ocurre que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$$

$$\xi \in \mathbb{R}.$$



— Procedemos entonces de la misma manera con el int. $[a_1, b_1]$:

Tomamos el punto medio; este genera 2 subint. en al menos uno de los cuales tendríamos que haber una infinidad de elementos de Ω . Llamamos $[a_2, b_2]$ a dicho sub-intervalo. ¿Qué cumple $[a_2, b_2]$? 3 cosas:

$$(i) [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b].$$

$$(ii) l([a_2, b_2]) = \frac{1}{2} l([a_1, b_1]) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} l([a, b]) \right) = \frac{1}{2^2} (b-a)$$

(iii) En $[a_2, b_2]$ hay una infinidad de elementos de Ω .

Seguimos indefinidamente este procedimiento, y con ello generamos una sucesión de intervalos cerrados $\{[a_n, b_n]\}$ que cumplen:

$$(i) [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$[a_0, b_0] = [a, b].$$

$$(ii) l([a_n, b_n]) = \frac{1}{2^n} l([a, b]) = \frac{1}{2^n} \cdot (b-a)$$

(iii) En $[a_n, b_n]$ hay una infinidad de elementos de Ω .

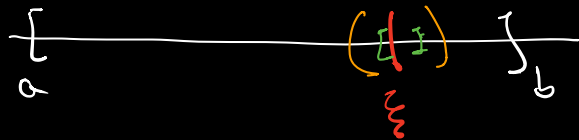
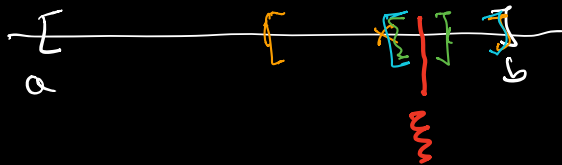
$\{[a_n, b_n]\}$ es un encaje de intervalos cerrados.

$$l([a_n, b_n]) = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

→ Se utiliza la propiedad arquimedea.

↓ Teo. encaje interr.

$$\exists \xi \in \mathbb{R} \rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}.$$



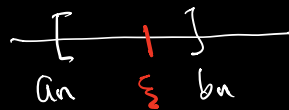
P.D. ξ es p. de a. de Ω .

Sea $r > 0$. P.D. En $V_r(\xi)$ hay una infinidad de elementos de Ω .

$$(b_n - a_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \exists N(r) \rightarrow \forall n > N, \quad b_n - a_n < r.$$

Sea $n > N$.

$$a_n \leq \xi \leq b_n$$



$$\Rightarrow [a_n, \xi] \subseteq [a_n, b_n] \quad \text{y} \quad [\xi, b_n] \subseteq [a_n, b_n]$$

$$\Rightarrow \xi - a_n \leq b_n - a_n < r \quad \text{y} \quad b_n - \xi \leq b_n - a_n < r$$

$$\Rightarrow \xi - r < a_n \quad \text{y} \quad b_n < \xi + r$$

$$\therefore [a_n, b_n] \subset (\xi - r, \xi + r) = V_r(\xi)$$

y como hay una infinidad de elementos de Ω en $[\bar{a}_n, b_n]$

\Rightarrow hay una infinidad de elementos de Ω en $V_r(\mathbb{F})$. .