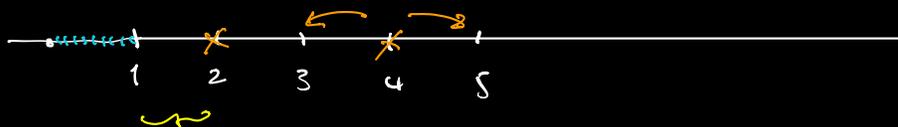


Vimos ayer que los conjuntos finitos no tienen ningún p. de a.  
 ¿Qué pasa con los conjuntos infinitos? Los hay sin puntos de acumulación; y los hay con p. de a.

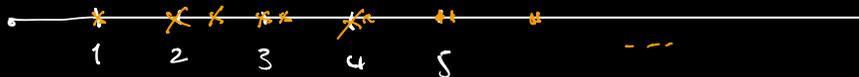
Por ejemplo  $\mathbb{N}$ :  $\rightarrow$  infinito, no tiene ningún p. de a.

¿Qué caract. tienen los elementos de  $\mathbb{N}$ ? Todos sus elementos están separados entre sí más (o igual) que una distancia positiva fija ( $=1$ ):



$$\Omega = \{ .001n : n \in \mathbb{N} \} = .001, .002, .003, \dots$$

$$\Omega = \left\{ n, n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1, 2, 2 + \frac{1}{2}, 3, 3 + \frac{1}{3}, 4, 4 + \frac{1}{4}, \dots$$



$$\Omega = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \dots, \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right), \dots$$

(---)

Todos ellos son conj. infinitos sin p. de a. alguno.

¿Qué tienen en común?

¿Qué les permite a los elementos (2 ults ej.s.)irse pegando entre sí, sin acabar acumulándose en torno a ningún punto de la recta?

Todos ellos son conjuntos NO ACOTADOS.



Pregunta:

¿Y si un conjunto infinito fuese acotado, podría no tener ningún p. de a.?

Veamos: Sea  $\Omega$  un conj. infinito acotado.

$$\Downarrow \\ \Omega \subseteq [a, b], \quad a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\Omega \subseteq [0, 1000]$$



$$0, .001, .002, .003, \dots, .999, 1, 1.001, \dots, 1.999, 2, \dots, \\ = \\ 999, 999.01, \dots, 999.999, 1000$$

$$\frac{p}{2^n} \\ (\dots)$$

Todo indica que:

Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Si  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  infinito y acotado  $\Rightarrow \exists \xi \in \mathbb{R}$  s.t.  
 $\xi$  es p. de a. de  $\Omega$ .

i.e. Todo conjunto infinito y acotado tiene el menos un punto de acumulación.

---

¿Puede el teorema anterior formularse en un campo ordenado en general?

" Sea  $X$  un campo ordenado.

Si  $\Omega \subseteq X$  es un conjunto infinito y acotado

$\Rightarrow \exists \xi \in X$  s.t.  $\xi$  es punto de acumulación de  $\Omega$  "

En particular: ¿Es válido el Teo B-W en  $\mathbb{Q}$ ?

i.e. ¿Es válido que  $\forall \Omega \subseteq \mathbb{Q}$ ,  $\Omega$  infinito y acotado  
 $\exists \xi \in \mathbb{Q}$  s.t.  $\xi$  es p. de a. de  $\Omega$ ?



Pensemos en el conjunto

$$\Omega = \{.1, .101, .101001, .1010010001, \dots\}$$

Obrviamente se trata de un conjunto infinito, y acotado, pues

$$0, 1 \in \mathbb{Q}, \quad 0 < x < 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad \Omega \subseteq \mathbb{Q}.$$

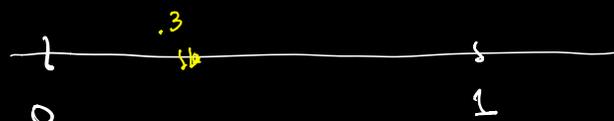


¿Quién es el único p. de a. de  $\Omega$ ?

$$\alpha = .101001000100001\dots$$

↓  
 $\alpha \in \mathbb{I}$ .

$$A = \{.3, .33, .333, .3333, \dots\}$$



$$.33333\dots = \frac{1}{3}$$

$\mathbb{I}$



### Teorema de B-W

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto infinito y acotado.

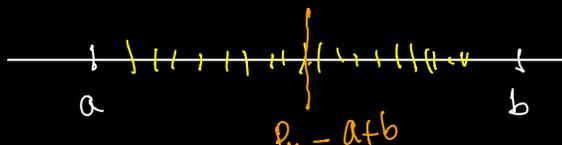
Entonces  $\exists \xi \in \mathbb{R}$  s.t.  $\xi$  es p. de a. de  $\Omega$ .

Dem.

Por ser  $\Omega$  acotado  $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$

$a < b$  s.t.  $a \leq x \leq b \quad \forall x \in \Omega$ .

i.e.  $\Omega \subseteq [a, b]$ .



Recordatorio:

El teorema de encajes de intervalos.

$\forall$  encaje  $\{ [a_n, b_n] \}$  de intervalos cerrados en  $\mathbb{R}$  s.t.

$$\mathcal{L}([a_n, b_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \emptyset$$

Al tomar el punto medio entre  $a$  y  $b$  se generan dos subintervalos, al menos uno de ellos, con una infinidad de elementos de  $\Omega$ .

Llamemos  $[a_1, b_1]$  a dicho intervalo.

¿Qué cumple  $[a_1, b_1]$ ?

Tres cosas:

(i)  $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$ .

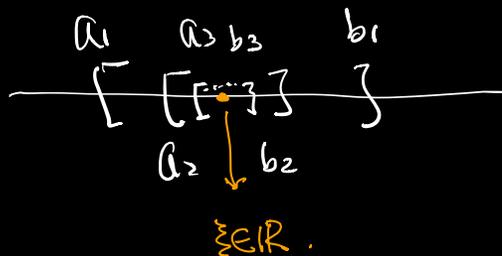
(ii)  $l([a_1, b_1]) = \frac{1}{2} l([a, b]) = \frac{1}{2} (b-a)$

(iii) En  $[a_1, b_1]$  hay una infinidad de elementos de  $\Omega$ .

Ocurre que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$$

$$\xi \in \mathbb{R}.$$



— Procedamos entonces de la misma manera con el int.  $[a_1, b_1]$ :

Tomamos el punto medio; este genera 2 subint. en al menos uno de los cuales tendríamos que haber una infinidad de elementos de  $\Omega$ . Llamamos  $[a_2, b_2]$  a dicho sub-intervalo. ¿Qué cumple  $[a_2, b_2]$ ? 3 cosas:

(i)  $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$ .

(ii)  $l([a_2, b_2]) = \frac{1}{2} l([a_1, b_1]) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} l([a, b]) \right) = \frac{1}{2^2} (b-a)$

(iii) En  $[a_2, b_2]$  hay una infinidad de elementos de  $\Omega$ .

Seguimos indefinidamente este procedimiento, y con ello generamos una sucesión de intervalos cerrados  $\{[a_n, b_n]\}$  que cumplen:

(i)  $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$[a_0, b_0] = [a, b]$ .

(ii)  $l([a_n, b_n]) = \frac{1}{2^n} l([a, b]) = \frac{1}{2^n} \cdot (b-a)$

(iii) En  $[a_n, b_n]$  hay una infinidad de elementos de  $\Omega$ .

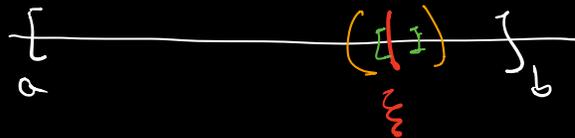
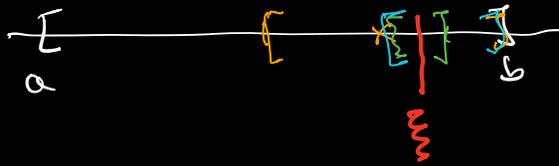
$\{[a_n, b_n]\}$  es un encaje de intervalos cerrados.

$$l([a_n, b_n]) = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

→ Se utiliza la propiedad arquimedean.

↓ Teo. encaje interv.

$$\exists \xi \in \mathbb{R} \rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}.$$



P.D.  $\xi$  es p. de a. de  $\Omega$ .

Sea  $r > 0$ . P.D. En  $V_r(\xi)$  hay una infinidad de elementos de  $\Omega$ .

$$(b_n - a_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \exists N(r) \rightarrow \forall n > N, \quad b_n - a_n < r.$$

Sea  $n > N$ .

$$a_n \leq \xi \leq b_n$$



$$\Rightarrow [a_n, \xi] \subseteq [a_n, b_n] \quad \text{y} \quad [\xi, b_n] \subseteq [a_n, b_n]$$

$$\Rightarrow \xi - a_n \leq b_n - a_n < r \quad \text{y} \quad b_n - \xi \leq b_n - a_n < r$$

$$\Rightarrow \xi - r < a_n \quad \text{y} \quad b_n < \xi + r$$

$$\therefore [a_n, b_n] \subset (\xi - r, \xi + r) = V_r(\xi)$$

y como hay una infinidad de elementos de  $\Omega$  en  $[\bar{a}_n, \bar{b}_n]$

$\Rightarrow$  hay una infinidad de elementos de  $\Omega$  en  $V_r(\mathbb{F})$ . 